4. Fonctions analytiques

1. Régions dans le plan complexe

Un ensemble est *ouvert* s'il ne contient aucun des points de sa frontière. Un ensemble est *fermé* s'il contient tous les points de sa frontière. Un ensemble ouvert $\mathcal{S}$ est *connexe* si chaque couple de points z_1 et z_2 peut être lié par un chemin polygonal, constitué d'un nombre fini de segments de droites joignant les deux extrémités, et situé entièrement dans $\mathcal{S}$. Par exemple, l'ensemble ouvert $|z| < 1$ est connexe. De façon plus imagée, on peut dire qu'un ensemble est connexe s'il est "en un seul morceau". L'anneau $1 < |z| < 2$ est ouvert, et il est aussi connexe.

Un ensemble ouvert et connexe est appelé un *domaine*. Un domaine avec tout ou partie de ses points frontières constitue une *région*.

Un ensemble $\mathcal{S}$ est *borné* si tout point de S est situé à l'intérieur d'un certain cercle $|z| = R$. Si la frontière d'un domaine $\mathcal{D}$ est connexe, alors $\mathcal{D}$ est appelé *domaine simplement connexe*.

2. Fonctions d'une variable complexe

2.1. Définition

Nous considérons maintenant les fonctions d'une variable complexe. La différentiation et l'intégration, définies pour les fonctions réelles d'une variable réelle, acquièrent dans le domaine complexe une nouvelle signification. En même temps, le domaine d'applicabilité devient radicalement restreint. Seules les fonctions *holomorphes* (que l'on appelle aussi fonctions *analytiques*[1]) peuvent être librement différentiées et intégrées.

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de nombres complexes. Une *fonction* f définie sur $\mathcal{S}$ est une règle qui assigne à chaque nombre z de $\mathcal{S}$ un nombre complexe w. Ce nombre w est appelé la *valeur* de f au point z, dénotée par $f(z)$:

$$w = f(z). \tag{2.1}$$

[1] Nous reviendrons par la suite sur l'équivalence des deux définitions, celle des fonctions holomorphes (c'est-à-dire dérivables) d'une part, celle des fonctions analytiques (c'est-à-dire développables en série entière) d'autre part.

L'ensemble $\mathcal{S}$ est appelé l'*ensemble de définition* de f. Pour qu'une fonction soit convenablement définie, il est nécessaire d'avoir à la fois un ensemble de définition et une règle. Si l'ensemble de définition n'est pas précisé, on considére que c'est l'ensemble le plus grand qu'il est possible de prendre. Par exemple, pour la fonction $1/z$, l'ensemble de définition est l'ensemble de tous les points du plan sauf l'origine. Dans la suite, le cas où l'ensemble de définition est un domaine, c'est-à-dire un ensemble ouvert et connexe, sera le plus important. C'est pourquoi l'on parlera souvent dans la suite du *domaine de définition* de la fonction.

Le concept de fonction peut se généraliser en utilisant une règle qui assigne plus d'une valeur à un point z du domaine de définition. Ces fonctions *multiformes* (ou *multivaluées*) apparaissent dans la théorie des fonctions d'une variable complexe exactement comme elles apparaissent dans le cas des fonctions d'une variable réelle. Un exemple est $z^{1/2}$, qui prend deux valeurs à chaque point autre que l'origine dans le plan complexe. À moins que le contraire ne soit précisé, le terme fonction désigne une fonction *uniforme* ou *univaluée*.

2.2. Partie réelle et partie imaginaire d'une fonction

Si $w = u + iv$ est la valeur d'une fonction f au point $z = x + iy$, c'est-à-dire si l'on a

$$u + iv = f(x + iy), \tag{2.2}$$

chacun des nombres réels u et v dépend des deux variables réelles x et y. On a :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.3}$$

Inversement, si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont deux fonctions réelles données des variables réelles x et y, l'équation (2.3) peut être utilisée pour définir une fonction de la variable complexe $z = x + iy$.

Si, dans l'équation (2.2), le nombre $v(x, y)$ est toujours nul, alors la fonction $f(z)$ est toujours réelle. Un exemple de fonction d'une variable complexe à valeurs réelles est $f(z) = |z|^2$.

2.3. Exemple

Si $f(z) = z^2$, alors

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy. \tag{2.4}$$

Pour cette fonction, on a :

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.4. Polynômes et fractions rationnelles

Si n est soit zéro, soit un entier positif, et si $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes complexes, la fonction

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0) \tag{2.6}$$

est un *polynôme* de degré n. Cette somme a ici un nombre fini de termes et le domaine de définition de $P(z)$ est le plan des z tout entier. Les quotients de polynômes $P(z)/Q(z)$ sont appelés *fractions rationnelles* et sont définis en chaque point z sauf aux points où le dénominateur $Q(z)$ s'annule. Les polynômes et les fractions rationnelles constituent des classes importantes de fonctions élémentaires d'une variable complexe.

3. Limites

Soit une fonction f définie en tous les points z autour d'un point z_0, sauf éventuellement au point z_0 lui-même. Dire que la *limite* de $f(z)$ lorsque z tend vers z_0 est un nombre w_0, autrement dit, écrire

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{3.1}$$

signifie que le point $w = f(z)$ peut être rendu arbitrairement proche de w_0 si le point z est choisi assez proche de z_0 (mais différent de z_0). D'après notre définition, la fonction $f(z)$ tend vers sa limite indépendamment de la manière dont le point z tend vers le point z_0.

Il est utile de faire tout de suite le lien entre la limite d'une fonction d'une variable complexe et les limites des fonctions à valeurs réelles de deux variables réelles. Pour une fonction $f(z)$ de la forme

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad z_0 = x_0 + iy_0, \qquad w_0 = u_0 + iv_0, \tag{3.2}$$

on a

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{3.3}$$

si, et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

4. Continuité

La fonction $f(z)$ est dite *continue* au point z_0 si elle est définie autour de z_0 (y compris en z_0) et si l'on a :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{4.1}$$

Pour que $f(z)$ soit continue au point z_0, il faut et il suffit que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ soient continues au point (x_0, y_0).

La fonction $f(z)$ est dite *continue dans un domaine* $\mathcal{D}$ si elle est continue en chaque point de ce domaine. Beaucoup de propriétés des fonctions continues d'une variable complexe peuvent se déduire des propriétés correspondantes des fonctions continues à valeurs réelles de deux variables réelles. Par exemple, si une fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est continue dans une région $\mathcal{R}$ à la fois fermée et bornée, elle est bornée sur cette région, et elle atteint son maximum quelque part dans $\mathcal{R}$. Ceci signifie qu'il existe un nombre réel non négatif M tel que

$$|f(z)| \leq M, \tag{4.2}$$

où l'égalité a lieu pour au moins une valeur de z.

5. Dérivées

5.1. Dérivabilité

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un voisinage du point z_0. La *dérivée* de f en z_0, notée $f'(z_0)$, est définie par la formule

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{5.1}$$

à la condition que la limite existe. La fonction f est dite *différentiable* en z_0 quand sa dérivée au point z_0 existe.

Il y a une différence fondamentale entre les cas d'une variable réelle et d'une variable complexe. Prenons par exemple une fonction à valeurs réelles d'une variable complexe dont la dérivée existe en $z = a$. D'une part, $f'(a)$ doit être réelle, car c'est la limite du rapport

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{5.2}$$

lorsque h tend vers zéro par valeurs réelles. D'autre part, c'est aussi la limite du rapport

$$\frac{f(a + ih) - f(a)}{ih} \tag{5.3}$$

et donc, en tant que telle, c'est une quantité purement imaginaire. Donc $f'(a)$ doit être nulle. Par conséquent, une fonction à valeurs réelles d'une variable complexe, ou bien a une dérivée nulle, ou bien n'a pas de dérivée.

L'existence de la dérivée d'une fonction complexe d'une variable complexe a des conséquences importantes pour la structure de la fonction.

5.2. Définition des fonctions holomorphes

On appelle *fonctions holomorphes* les fonctions complexes d'une variable complexe qui possèdent une dérivée en tout point où elles sont définies. Nous allons maintenant donner les conditions de différentiabilité d'une fonction $f(z)$ au moyen des fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$. Ces conditions sont les *conditions de Cauchy-Riemann*, ainsi nommées en l'honneur de *A. Cauchy* (1789-1857), qui les a découvertes et utilisées, et de *B. Riemann* (1826-1866), qui les a rendues fondamentales dans ses développements de la théorie des fonctions d'une variable complexe. En réalité, ces conditions avaient été obtenues auparavant par *J. le Rond d'Alembert* (1752) et par *L. Euler* (1755), en relation avec des problèmes d'hydrodynamique.

6. Conditions de Cauchy-Riemann

6.1. Conditions nécessaires de dérivabilité

La définition de la dérivée au point z peut se réécrire sous la forme

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}. \tag{6.1}$$

La limite de ce rapport doit être indépendante de la façon dont la quantité complexe $h = s + it$ tend vers zéro. Si on prend $h = s$ réel, alors la partie imaginaire t de h reste nulle, et la dérivée devient une dérivée partielle par rapport à x. Donc, on a :

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.2}$$

De même, si $h = it$ est imaginaire pur, on a :

$$f'(z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{6.3}$$

Si $f'(z)$ existe, $f(z)$ doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{6.4}$$

qui équivaut aux deux équations aux dérivées partielles réelles :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}} \tag{6.5}$$

Les équations (6.5) sont les équations aux dérivées partielles de *Cauchy-Riemann*, qui doivent être satisfaites par les parties réelle et imaginaire de toute fonction holomorphe. Ce sont des conditions nécessaires pour l'existence de la dérivée d'une fonction f en un point. Elles peuvent donc être utilisées pour localiser les points où f ne possède pas de dérivée.

6.2. Conditions suffisantes de dérivabilité

Inversement, si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont différentiables, on a

$$\begin{cases} u(x+s, y+t) - u(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}s + \dfrac{\partial u}{\partial y}t + \alpha|h| \\ v(x+s, y+t) - v(x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}s + \dfrac{\partial v}{\partial y}t + \beta|h|, \end{cases} \tag{6.6}$$

où α et β tendent vers zéro avec $h = s + it$. Alors on a

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + i\Big(\frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t\Big) + \eta|h|, \tag{6.7}$$

où $\eta = \alpha + i\beta$. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann (6.5), on obtient

$$f(z+h) - f(z) = \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\ (s+it) + \eta|h| \tag{6.8}$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.9}$$

est un nombre bien défini, indépendant de h, et où η tend vers zéro avec h. On a donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.10}$$

Cette limite est bien définie. La dérivée $f'(z)$ existe.

7. Fonctions holomorphes (ou analytiques)

Revenons sur la définition des fonctions holomorphes. Une fonction $w = f(z)$ est dite *holomorphe* en un point donné z d'un domaine $\mathcal{D}$ si elle est dérivable aussi bien au point z lui-même que dans un certain voisinage de ce point. On dit que la fonction $w = f(z)$ est *holomorphe dans le domaine* $\mathcal{D}$ si elle est dérivable en chaque point de ce domaine. Le terme *analytique*[2] (plus employé par les physiciens que le terme holomorphe) est un synonyme du terme *holomorphe*.

Une fonction *entière* est une fonction qui est analytique en chaque point à distance finie du plan complexe. Puisque la dérivée d'un polynôme existe partout, tout polynôme est une fonction entière.

[2] Nous reviendrons dans la suite de ce cours sur la définition précise de la notion de fonction analytique.

Si une fonction f n'est pas analytique en un point z_0 mais est analytique dans tout voisinage de z_0, alors z_0 est appelé un *point singulier* ou une *singularité* de f. Par exemple, la fonction $f(z) = 1/z$ $(z \neq 0)$, dont la dérivée est $f'(z) = -1/z^2$, est analytique en tout point $z \neq 0$ (elle n'est même pas définie en $z = 0$). Le point $z = 0$ est donc un point singulier.

Si deux fonctions sont analytiques dans un domaine $\mathcal{D}$, leur somme et leur produit sont tous les deux analytiques dans $\mathcal{D}$. De même, leur quotient est analytique dans $\mathcal{D}$ pourvu que le dénominateur ne s'annule en aucun point de $\mathcal{D}$.

8. Fonctions élémentaires

Ces fonctions sont un prolongement naturel au domaine complexe des fonctions élémentaires usuelles en analyse réelle. Par un tel prolongement, ces fonctions s'enrichissent de nouvelles propriétés. Par exemple, la fonction exponentielle d'une variable complexe e^z devient périodique, les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ cessent d'être bornées, le logarithme des nombres négatifs (et, en général, de tout nombre complexe non nul) prend un sens.

8.1. Fonction exponentielle

• La fonction exponentielle est définie par la relation

$$e^z = e^x\,(\cos y + i \sin y). \tag{8.1}$$

Pour $z = x$ réel, cette définition coïncide avec la définition ordinaire. De plus, la fonction ainsi définie est partout analytique, puisqu'en chaque point du plan les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, et que les parties réelle et imaginaire de e^z sont différentiables.

• La formule connue de dérivation $(e^z)' = e^z$ est conservée. La propriété fondamentale d'addition de la fonction exponentielle

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{8.2}$$

est également conservée.

• La fonction exponentielle ne s'annule pour aucune valeur complexe $z = x + iy$. En effet, $|e^z| = e^x > 0$.

• La fonction exponentielle d'une variable complexe possède aussi une propriété spécifique : elle est *périodique* de période fondamentale purement imaginaire $2\pi i$. En effet, pour tout nombre *entier* k, on a

$$\exp(z + 2k\pi i) = \exp z. \tag{8.3}$$

8.2. Fonctions trigonométriques

• On définit les fonctions sinus et cosinus d'une variable complexe z par les formules :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{8.4}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions entières, puisqu'elles sont des combinaisons linéaires des fonctions entières e^{iz} et e^{-iz}. On a :

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z. \tag{8.5}$$

Les identités trigonométriques usuelles sont valables en variables complexes.

• Les parties réelles et imaginaires de $\sin z$ et $\cos z$ sont données par

$$\sin z = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + i \cos x \,\mathrm{sh}\, y \tag{8.6}$$

et

$$\cos z = \cos x \,\mathrm{ch}\, y - i \sin x \,\mathrm{sh}\, y, \tag{8.7}$$

où $z = x + iy$. Beaucoup de propriétés importantes de $\sin z$ et de $\cos z$ se déduisent de ces égalités. Par exemple, on a :

$$\sin(iy) = i \,\mathrm{sh}\, y, \qquad \cos(iy) = \mathrm{ch}\, y. \tag{8.8}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y, \\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ ne sont pas bornées en valeur absolue (au contraire de $\sin x$ et $\cos x$ pour x réel).

• Les zéros des fonctions sinus et cosinus sont tous réels. Les zéros de $\sin z$ sont les nombres $z = n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Les zéros de $\cos z$ sont les nombres $z = (n + 1/2)\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

• Les autres fonctions trigonométriques sont définies à l'aide des fonctions sinus et cosinus par les relations usuelles :

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \mathrm{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{8.10}$$

8.3. Fonctions hyperboliques

• Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont définies par

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{8.11}$$

Ce sont des fonctions entières.

• Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont étroitement reliées aux fonctions trigonométriques :

$$-i\,\mathrm{sh}\,(iz) = \sin z, \qquad -i\sin(iz) = \mathrm{sh}\, z, \tag{8.12}$$

$$\mathrm{ch}\,(iz) = \cos z, \qquad \cos(iz) = \mathrm{ch}\, z. \tag{8.13}$$

• Les parties réelle et imaginaire de $\mathrm{sh}\, z$ et $\mathrm{ch}\, z$ sont données par :

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}\, z &= \mathrm{sh}\, x \cos y + i\,\mathrm{ch}\, x \sin y, \\ \mathrm{ch}\, z &= \mathrm{ch}\, x \cos y + i\,\mathrm{sh}\, x \sin y. \end{aligned} \tag{8.14}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} |\mathrm{sh}\, z|^2 &= \mathrm{sh}^2 x + \sin^2 y, \\ |\mathrm{ch}\, z|^2 &= \mathrm{sh}^2 x + \cos^2 y, \end{aligned} \tag{8.15}$$

où $z = x + iy$.

• Les fonctions $\mathrm{sh}\, z$ et $\mathrm{ch}\, z$ sont des fonctions périodiques de période $2\pi i$.

• Les zéros de $\mathrm{sh} z$ sont les nombres $z = n\pi i (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Les zéros de $\mathrm{ch}\, z$ sont les nombres $z = (n + 1/2)\pi i (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

• La tangente hyperbolique de z est définie par l'équation :

$$\mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}. \tag{8.16}$$

Elle est analytique dans tout domaine où $\mathrm{ch}\, z$ ne s'annule pas.

8.4. La fonction logarithme et ses branches

• Soit $\log r$ le logarithme naturel d'un nombre réel positif r. On définit le logarithme d'une variable complexe non nulle $z = re^{i\theta}$ par l'équation :

$$\log z = \log r + i\theta. \tag{8.17}$$

Autrement dit, on a :

$$\log z = \log |z| + i \arg z, \qquad (z \neq 0). \tag{8.18}$$

Dans la formule (8.18), le symbole $\arg z$ désigne une détermination arbitraire de l'argument de z. Ainsi, chaque nombre complexe $z \neq 0$ possède un ensemble infini de logarithmes. Le logarithme est donc une fonction à une infinité de déterminations. Sa partie réelle est définie de manière unique, sa partie imaginaire à un terme additif multiple de 2π près.

• La *détermination principale* de $\log z$ est donnée par

$$\operatorname{Log} z = \log r + i\Theta, \tag{8.19}$$

soit

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad z \neq 0,\ -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi, \tag{8.20}$$

où $\operatorname{Arg} z$ est la *détermination principale* de $\arg z$. La fonction $\operatorname{Log} z$ est univaluée. On peut montrer, en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, que la fonction $\operatorname{Log} z$ est analytique dans le domaine $r > 0,\ -\pi < \theta < \pi$, constitué de tous les points du plan sauf $z = 0$ et le demi-axe réel négatif. La fonction $\operatorname{Log} z$ n'est pas continue, et donc pas analytique dans tout son domaine de définition $r > 0,\ -\pi < \Theta \leq \pi$, mais seulement dans le domaine $r > 0,\ -\pi < \Theta < \pi$. Dans le domaine d'analyticité, on a :

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}, \qquad |z| > 0, \qquad -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi. \tag{8.21}$$

• On aurait pu tout autant définir une fonction :

$$\log z = \log r + i\theta, \qquad r > 0, \qquad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi. \tag{8.22}$$

Une *branche* d'une fonction multivaluée f est une fonction univaluée F qui est analytique dans un domaine dans lequel la valeur $F(z)$ est l'une des valeurs $f(z)$. La fonction $\operatorname{Log} z$, restreinte au domaine $r > 0,\ -\pi < \Theta < \pi$, est une branche de la fonction logarithme (8.18). Cette branche est appelée la *branche principale*. Chaque point du demi-axe réel négatif, aussi bien que l'origine, est un point singulier de la branche principale de la fonction logarithme. Le demi-axe réel négatif est la *coupure* de la branche principale, une coupure étant par définition une ligne, constituée de points singuliers, introduite de manière à définir une branche d'une fonction multivaluée. La demi-droite $\theta = \alpha$ est la coupure pour la branche (8.22) de la fonction logarithme. Un point singulier commun à toutes les coupures pour une fonction multivaluée est appelé un *point de branchement*. L'origine est un point de branchement pour la fonction logarithme.

8.5. La fonction puissance générale

• La fonction puissance générale $w = z^a$, où $a = \alpha + i\beta$ est un nombre complexe quelconque, est définie par la relation

$$z^a = e^{a \log z}, \tag{8.23}$$

où $\log z$ dénote la fonction logarithme multivaluée. Si $z = re^{i\theta}$, et si α est un nombre réel quelconque, la fonction

$$\log z = \log r + i\theta, \qquad r > 0, \qquad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi, \tag{8.24}$$

est univaluée et analytique dans le domaine $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$. Quand on utilise cette branche de $\log z$, la fonction z^a est univaluée et analytique dans le même domaine.

• La *détermination principale* de z^a est obtenue quand $\log z$ est remplacé par sa détermination principale $\operatorname{Log} z$ dans la définition (8.23).

• Le point de branchement de la fonction puissance générale est $z = 0$.